Corrigé des exercices du livre 106 et 107 p.274

106 Soit A le point d'abscisse 5 de la droite (d) alors l'ordonnée de A vérifie :
$-18 \times 5 - 15y - 210 = 0 \Leftrightarrow y = -20$ donc le point A$(5 ; -20)$ appartient à (d).
On cherche une équation de la droite (h) perpendiculaire à (d) passant par A.
Un vecteur directeur de (d) est $(15 ; -18)$ ou $(5 ; -6)$.
Un vecteur normal à (h) est $(5 ; -6)$, donc une équation de (h) est :
$5x - 6y + c = 0$
avec $5 \times 5 - 6 \times (-20) + c = 0 \Leftrightarrow c = -145$.
Donc (h) : $5x - 6y - 145 = 0$.
Soit B le point d'intersection entre (h) et (d').
Les coordonnées de B vérifient :

$$\begin{cases} 5x - 6y - 145 = 0 \\ 6x + 5y - 1\,089 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 30x - 36y = 870 \\ 30x + 25y = 5\,445 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 30x = 36y + 870 \\ 61y = 4\,575 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 119 \\ y = 75 \end{cases}$$

Ainsi la distance à parcourir est :

$$\text{AB} = \sqrt{(119-5)^2 + (75+20)^2}$$
$$= \sqrt{12\,996 + 9\,025} = \sqrt{22\,021}$$
$$\approx 148 \text{ m}.$$

107 **1.** (AC) : $y = 0$ et (BD) : $y = x$.

2. Comme le cercle est tangent aux deux segments en A et B, on peut dire que $(\Omega\text{A}) \perp (\text{AC})$ et $(\Omega\text{B}) \perp (\text{BD})$.

3. a. Les coordonnées du milieu de [AB] sont : $\left(\frac{a+1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.
$\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix} 1-a \\ 1 \end{pmatrix}$, donc une équation de la médiatrice de [AB] est : $(1 - a)x + y + c = 0$.
De plus :
$(1-a)\frac{a+1}{2} + \frac{1}{2} + c = 0 \Leftrightarrow \frac{1-a^2+1}{2} + c = 0$
$\Leftrightarrow c = \frac{a^2}{2} - 1$.
Donc (m) : $(1-a)x + y + \frac{a^2}{2} - 1 = 0$.

b. Ω est sur la médiatrice de [AB], ses coordonnées vérifient l'équation ci-dessus.

4. a $\overrightarrow{\text{BD}}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, donc une équation de la perpendiculaire à (BD) passant par B est :
$x + y + c = 0$ avec $1 + 1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -2$.
Une équation est $x + y - 2 = 0$.

b Les coordonnées de Ω vérifient le système :

$$\begin{cases} (1-a)x + y + \frac{a^2}{2} - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ (1-a)x + 2 - x + \frac{a^2}{2} - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ -ax + \frac{a^2}{2} + 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - x \\ x = \frac{a^2+2}{2a} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{4a-a^2-2}{2a} \\ x = \frac{a^2+2}{2a} \end{cases}$$
(a étant différent de 0).

5. a. $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix} -3-a \\ 0 \end{pmatrix}$; l'équation de la perpendiculaire à (AC) passant par A est $x = a$.
b. Ω est aussi sur cette droite donc ses coordonnées vérifient son équation.
Ainsi les coordonnées de ce point vérifient :

$$\begin{cases} y = 2 - a \\ a = \frac{a^2+2}{2a} \end{cases}.$$

On résout l'équation :
$a = \frac{a^2+2}{2a} \Leftrightarrow 2a^2 = a^2 + 2$ pour a non nul
$\Leftrightarrow a^2 = 2$. Comme $a \leqslant -1$ alors $a = \sqrt{2}$.